Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Développements :

Suite récurrente : convergence lente, Théorème de Bernstein pour les séries entières.

Bibliographie :

El Amrani, Gourdon, Combes suites et séries, Pommellet, Rouvière.

Rapport du jury 2017 :

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes. Le théorème de Bolzano-Weierstrass doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de Cesàro doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de R permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème. Des thèmes de la leçon 226 peuvent également se retrouver dans cette leçon. Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable. La méthode de Newton peut aussi illustrer la notion de vitesse de convergence.

Rapport du jury 2016 :

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes. Le théorème de Bolzano-Weierstrass doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de Cesàro doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de R permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème. Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable.

Remarque 1. *On ne s'intéresse qu'à des suites numériques, ie à des fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

1 Convergence

1.1 Limite d'une suite

Définition 2 (El Amrami p13)**.** *[Gourdon p191][Combes p11] Suite convergente si elle admet une limite finie. Suite divergente.*

Remarque 3 (Combes p20)**.** *Définir une limite pour $+\infty$.*

Exemple 4 (El Amrami p12)**.** $u_n = 1+(-1)^n/n$ *converge vers* 1, (n) *diverge vers* $+\infty$.

Exemple 5 (Gourdon p193)**.** *Suite géométrique, suite arithmétique.*

Proposition 6 (El Amrami p12)**.** *Unicité de la limite.*

Application 7 (Gourdon p20)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue en* $a \in \mathbb{R}$ *si et seulement si pour toute suite* $u_n \to a$, $f(u_n) \to f(a)$. *(Ici ?)*

Exemple 8. $\sin(1/x)$ *n'est pas prolongeable par continuité en* 0.

Proposition 9 (El Amrami p12)**.** *Toute suite convergente est bornée.*

Contre exemple 10. $sin(n)$.

Proposition 11. *L'ensemble des suites convergents est un ev.*

Proposition 12. *Caractérisation séquentielle.*

Proposition 13 (El Amrani p16)**.** *Limite du produit et de l'inverse.*

Contre exemple 14. *Le produit peut converger sans que la suite converge.* $(-1)^n$.

Proposition 15 (Combes p13)**.** *Si* $u_n \to 0$ *et* (v_n) *est bornée alors* $u_n v_n \to 0$.

Exemple 16. $\frac{\sin(n)}{\sqrt{n+\sin(n)}+\sqrt{n}}$.

1.2 Théorèmes de convergence

Proposition 17 (Combes p12)**.** *Soit E une partie non vide majorée. E admet un plus petit élément.*

Proposition 18 (El Amrani p32)**.** *Suites majorées croissantes convergent vers* $sup(u_n)$.

Proposition 19 (Combes p23)**.** *Suite croissante non majorée diverge vers* $+\infty$.

Exemple 20. $(1/n)$, $n/(n+1)$, $u_n) \sum \frac{1}{n!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

Proposition 21 (El Amrani p19)**.** *Théorème d'encadrement.*

Exemple 22. $(cos(n)/n)$.

Définition 23 (Gourdon)**.** *[El Amrani p33] Suites adjacentes.*

Proposition 24. *Si* $\sum u_n$ *converge alors* $u_n \to 0$.

Proposition 25 (El Amrani p33)**.** *Si deux suites sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont même limite.*

Exemple 26 (El Amrani p33)**.** $1 + 1/n$ *et* $1 - 1/n$.

Exemple 27 (Gourdon p201)**.** $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2$ *et* $v_{n+1} = \sqrt[2]{u_n v_n}$.

Exemple 28 (Combes)**.** *Si on pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ *et* $v_n = u_n + 1/n!$ *, ces deux suites sont adjacentes et convergent vers e.*

Application 29. *Séries alternées.*

Proposition 30 (Gourdon)**.** *Cesàro + cas général avec une série qui diverge.*

Exemple 31. $1/n \sum 1/k$.
$(-1)^n$.

Proposition 32. *Théorème d'Abel et exemples.*

1.3 Suites extraites et valeurs d'adhérence

Définition 33 (El Amrani p15)**.** *Suite extraite.*

Proposition 34 (El Amrani p15)**.** *Si* (u_n) *converge alors toutes ses suites extraites convergent.*

Contre exemple 35. $u_n = n1_{2\mathbb{N}} + 1$ *possède* u_{2n+1} *comme suite extraite convergente, mais diverge.*

Proposition 36 (El Amrami p16)**.** *Convergence de* (u_{2n}), (u_{2n+1}).

Application 37. *Théorème de Bernstein pour les séries entières.*

Définition 38 (El Amrami p15)**.** *Valeur d'adhérence.*

Proposition 39 (Gourdon p19)**.** *Caractérisation des valeurs d'adhérence en terme d'epsilon.*

Exemple 40 (El Amrani p15)**.** $(-1)^n$.
Pour (u_n) *k-périodique, ses valeurs d'adhérence sont* $(u_0, .., u_{k-1})$.

Proposition 41 (Gourdon p19)**.** *L'ensemble des valeurs d'adhérence est fermé. Expression de l'ensemble des valeurs d'adhérence.*

Exemple 42. *Les valeurs d'adhérence de* $exp(in)$ *est le cercle unité, valeurs d'adhérence de* $cos(n)$.
(n) *n'a aucune valeur d'ahérence.*

Proposition 43 (El Amrami p15)**.** *Toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence, sa limite.*

Exemple 44. $(-1)^n$ *ne converge pas.*

Exemple 45. *Une suite qui admet une unique valeur d'adhérence ne converge pas forcément : 0 quand n pair, n quand n impair.*

Proposition 46 (El Amrani p15)**.** *Une suite qui possède deux valeurs d'adhérence diverge.*

Proposition 47 (El Amrani p36)**.** *Bolzano-Weierstrass. Toute suite bornée de* $\mathbb{C}^N$ *possède une valeur d'adhérence.*

Application 48. *Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée et admet une unique valeur d'adhérence.*

Application 49. exp *réalise un homéomorphisme.*

Application 50 (Bernis)**.** *Limite de variables aléatoires gaussiennes.*

Proposition 51 (Gourdon)**.** *Soit* (E, d) *un espace métrique compact et* (u_n) *une suite de E telle que* $\lim d(u_{n+1}, u_n) = 0$. *Alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de* (u_n) *est connexe.*

Définition 52 (ZQ p1)**.** *[El Amrani p353] limsup, liminf dans* $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 53. $liminf \leq limsup$.

Proposition 54. $((n+1)^{-1^n}$ *liminf 0 et limsup 1.*

Proposition 55. *Equivalence limsup, limsup et lim.*

Proposition 56 (ZQ)**.** *[El Amrani p354] La liminf est la plus petite valeur d'adhérence. La limsup est la plus grande. Quand les quantités sont finies et égales, il y a convergence.*

Application 57 (Gourdon)**.** *Lemme d'Hadamard pour le rayon de convergence des séries entières.*

Proposition 58 (Gourdon ?)**.** *[ZQ ?] Convergence des suites sous-additives et rayon spectral.*

1.4 Suites de Cauchy

Définition 59 (El Amrani p34)**.** *Suite de Cauchy.*

Exemple 60. $(1/n)$.

Proposition 61 (El Amrani p34). *Toute suite de Cauchy est bornée.*
Toute sous-suite de Cauchy est de Cauchy.
Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge.
Toute suite convergente est de Cauchy.

Proposition 62 (El Amrani p35). *Les suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont exactement les suites convergentes.*

Exemple 63 (El Amrani p36). $u_n = \sum(1/k)$ *ne converge pas car pas de Cauchy.*

Exemple 64 (Combes p13). $\sum k^n \cos(n\theta)$.

Application 65 (Gourdon p52). *Toute série absolument convergente converge.*

Application 66 (Pommelet p25). *Construction de $\mathbb{R}$ avec les suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$?*

2 Comportement asymptotique

2.1 Relations de comparaison

Définition 67 (EL Amrani p25). *Relations de comparaison : o, O, $\sim$.*

Exemple 68. $(1 + 1/n)^n \sim e$.

Exemple 69 (Gourdon p200). $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

2.2 Sommation des équivalents

Proposition 70 (Gourdon p202). *Equivalents des sommes partielles et des restes.*

Application 71 (Gourdon p202). *Développement asymptotique de la série harmonique.*

Application 72 (Gourdon p211). *Formule de Stirling.*

3 Suites récurrentes

3.1 Itération d'une fonction

Définition 73 (Gourdon p192). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$. On appelle suite récurrente une suite vérifiant $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Proposition 74 (Gourdon p192). *Soit un suite récurrente.*
Si f est croissante, (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par $sgn(u_1 - u_0)$.
Si f est décroissante, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de monotonie opposés.

Proposition 75 (Gourdon p192). *Si (u_n) converge et f est continue, la limite est un point fixe de f .*

Exemple 76 (Gourdon p194). *Pour $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = 1/(2 - \sqrt{u_n})$, on a $u_n \to 1$.*
sin. *[Rouvière]*

Exemple 77. $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$. *Si (u_n) converge, sa limite est -1 ou 3. Ou Fibonacci.*

Proposition 78 (Gourdon p194, Rombaldi algèbre). *Structure des suites récurrentes linéaires.*

3.2 Classification de l'attractivié (Vitesse de convergence)

Théorème 79 (Rouvière). *Théorème du point fixe de Picard avec convergence géométrique.*

Application 80. *Théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Proposition 81 (Rouvière). *Répulsion, attraction, superattraction.*

Exemple 82 (Rouvière). *Le nombre d'or comme point fixe de $\sqrt{1 + x}$ ou $1 + 1/x$.*

Proposition 83 (Rouvière). *Théorème du point fixe compact. Vitesse de convergence possiblement très lente.*

Proposition 84 (Bernis). *Convergence lente d'une suite définie par récurrence. (Méthode des petits pas).*

Proposition 85 (Rouvière). *Méthode de Newton.*